Théorème de John

<u>Théorème :</u> Un compact K de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 dans son intérieur est contenu dans un unique ellipsoïde de volume minimal.

<u>Démonstration :</u> On pose $\mu : \begin{array}{ccc} S_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ S & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{\det S}} \end{array}$, et on remarque que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe. On va montrer que μ est convexe.

Soient $R, S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Par réduction simultanée des formes quadratiques, on fixe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que

$$R = {}^tP \begin{pmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_n \end{pmatrix} P$$

$$S = {}^tP \begin{pmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_n \end{pmatrix} P$$

où les r_i et les s_j sont dans $\mathbb{R}_+^*$. Soit $t \in [0,1]$.

On a
$$\begin{aligned}
\mu((1-t)R+tS) &= \mu\left({}^tP \operatorname{diag}((1-t)r_1+ts_1, \dots, (1-t)r_n+ts_n)\, P\right) \\
&= \left(\det({}^tP) \prod_{i=1}^{n} ((1-t)r_i+ts_i) \det(P)\right)^{-1/2} \\
&= |\det(P)|^{-1} \prod_{i=1}^{n} \left((1-t)r_i+ts_i\right)^{-1/2} \\
&= |\det(P)|^{-1} \prod_{i=1}^{n} \exp\left(-\tfrac{1}{2}\ln((1-t)r_i+ts_i)\right) \\
&\leqslant |\det(P)|^{-1} \prod_{i=1}^{n} \exp\left(-\tfrac{1}{2}((1-t)\ln r_i + t\ln s_i)\right) \quad \text{par concavité de } \ln \\
&\leqslant |\det(P)|^{-1} \exp\left(-\tfrac{1}{2}\left((1-t)\ln \prod_{i=1}^{n} r_i + t\ln \prod_{i=1}^{n} s_i\right)\right) \\
&\leqslant |\det(P)|^{-1} \left((1-t)\left(\prod_{i=1}^{n} r_i\right)^{-1/2} + t\left(\prod_{i=1}^{n} s_i\right)^{-1/2}\right) \quad \text{par convexité de } t \mapsto e^{-t/2} \\
&\leqslant (1-t)\mu(R) + t\mu(S)
\end{aligned}$$

Ceci prouve la convexité de μ. On a même μ strictement convexe.

Pour tout $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on note B_S la boule unité associée au produit scalaire défini par S. Pour $X \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\|X\| \leq 1 \Leftrightarrow {}^tXX \leq 1 \Leftrightarrow {}^t(AX)S(AX) \leq 1 \Leftrightarrow AX \in B_S,$$

où $A = \sqrt{S^{-1}} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Par théorème de changement de variable, on a $vol(B_S) = |\det A|\, vol(B)$, i.e $vol(B_S) = \mu(S)\, vol(B)$. On veut donc minimiser μ sur l'ensemble des $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $K \subset B_S$.

Soient $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $d > 0$ tels que $dB \subset B_S$.
Si $\|X\| \leq 1$, alors $dX \in B_S$, donc $\langle \sqrt{S}X, \sqrt{S}X \rangle = \langle SX, X \rangle \leq \frac{1}{d^2}$,
d'où $|||\sqrt{S}||| \leq \frac{1}{d}$, et $|||S||| \leq \frac{1}{d^2}$.

Comme K est borné, on fixe $r > 0$ tel que $K \subset rB$, i.e $K \subset B_{S_0}$, où $S_0 = \frac{1}{r^2} I_n$. On pose $C = \{S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \,/\, K \subset B_S, \mu(S) \leq \mu(S_0)\}$.
Il s'agit d'un ensemble convexe (car μ est convexe), non vide (car $S_0 \in C$), fermé. En effet si $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de C qui converge vers $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors S est symétrique, positive, et $\det S_k \geq \det(S_0) > 0$ pour tout k, donc $\det S > 0$. On vérifie de plus que $K \subset B_S$.

Enfin, 0 est intérieur à K, donc il existe $d > 0$ tel que $dB \subset K$.

Pour tout $S \in C$, on a alors $dB \subset K \subset B_S$, donc $|||S||| \leq \frac{1}{d^2}$.

Donc C est borné. Par suite, C est compact, et μ atteint donc un minimum sur C, en un unique point par stricte convexité de μ.

<u>Corollaire</u> : Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe du groupe orthogonal.

<u>Démonstration</u> : Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.
On pose $K = \bigcup_{A \in G} A\mathbb{B}$, qui est un compact (car image de $G \times \mathbb{B}$ par $(A, X) \longmapsto AX$) contenant 0 dans son intérieur (car $\mathbb{B} \subset K$).
Donc K est contenu dans un unique ellipsoïde de volume minimal $\mathbb{B}_S$.
Soit $B \in G$. On a $BK = K$, donc $B^p K = K$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
Mais $\mathbb{B} \subset K \subset \mathbb{B}_{S_0}$, donc $\mathbb{B} \subset B^p \mathbb{B}_{S_0}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$,
d'où $1 = \mu(I_n) \leq |\det B|^p \mu(S_0)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$, ce qui donne $|\det B| = 1$. On pose alors $R = {}^tBSB$. On a $R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $K \subset B_R$, et $\det R = \det S$. Par unicité de l'ellipsoïde $\mathbb{B}_S$, on a donc $R = S$.